SBGM : Conciliation et mesures de conflits

Sébastien Konieczny

SBGM: Conciliation et mesures de conflits

Sébastien Konieczny
konieczny@cril.fr

CRIL - CNRS, Université d'Artois, Lens, France

Résumé :
Nous proposons la définition de nouveaux opérateurs de conciliation. Ces opérateurs sont basés sur un processus itératif de sélection/affaiblissement des croyances/buts des agents, jusqu'à trouver un consensus (accord) entre les agents. Pour définir un opérateur particulier, il faut donc choisir la fonction de sélection et la fonction d'affaiblissement. Dans les travaux précédents la fonction de sélection était définie arbitrairement. Nous proposons de prendre comme fonction de sélection une mesure de conflit basée sur la valeur de Shapley, qui permet de définir la part de conflit imputable à chaque agent. Cela mène à une formalisation plus intuitive de ces processus de négociation abstraits.

Mots-clés : Négociation, conciliation, mesure de conflit

Abstract:
We propose to define new conciliation operators. Those operators are based on an iterative selection/weakening process of the beliefs/goals of the agents, until a consensus (agreement) is found between the agents. To define a particular operator, it just need to choose a choice function and a weakening function. In previous works the choice function was defined arbitrarily. We propose to take as choice function a measure of conflict based on the Shapley value, that allows to define the quantity of conflict due to each agent. This leads to a more intuitive formalization of those abstract negotiation processes.

Keywords: Negotiation, conciliation, measure of conflict

1 Introduction

La négociation se définit comme un processus ayant pour but de trouver un accord entre différents agents. De nombreux protocoles de négociation ont été proposés dans la littérature multi-agents. Beaucoup de ces protocoles sont basés sur l'argumentation, les jeux de dialogue, etc. La plupart de ces travaux sont descriptifs, c'est-à-dire qu'ils proposent une méthode effective pour réaliser un processus de négociation entre agents. Toutes ces approches ont en commun qu'elles peuvent être vues comme un jeu entre les agents, contraint par un protocole fixé, où chaque agent propose quelque chose, et où les autres agents peuvent accepter ce qui a été proposé, le contester, ou proposer une autre solution, etc. Ces protocoles de négociation peuvent donc être vus comme des jeux (non-coopératifs) à information incomplètes, puisque, comme les échanges entre les agents s'effectuent dans le cadre d'un protocole fixé, le résultat de la négociation ne prend pas en compte l'intégralité de l'opinion de chaque agent, mais simplement ce qui a été déclaré lors de l'interaction. Cela signifie en particulier que 1) il se peut qu'un accord optimal ne soit pas trouvé parce que des points importants n'ont pas été évoqués au cours de l'interaction 2) le résultat du processus de négociation peut varier suivant l'ordre dans lequel les agents ont pris la parole. Ces problèmes peuvent être vus comme des défauts inhérents à ce genre de protocoles, qui ne peuvent pas garantir qu'un "accord optimal" est atteint.

Une question intéressante est de tenter de définir ce que pourrait être cet "accord optimal". Il n'y a pas de réponse définitive à cette question : ce qu'est le meilleur accord entre plusieurs agents qui poursuivent leurs propres buts est une des questions principales qui est étudiée en théorie des jeux depuis des années. Le problème de marchandage (bargaining problem [14]) peut être considéré comme la forme la plus pure/typique de la négociation : parmi un ensemble d'issues possibles[1] un ensemble

[1]Habituellement on suppose que l'ensemble des issues est

de joueurs (deux dans le cas typique) doit se mettre d'accord sur une issue. S'ils n'arrivent pas à se mettre d'accord, le résultat sera une issue déterminée à l'avance. Le problème est alors, étant données ces seules hypothèses, de déterminer quel est le résultat optimal/juste pour ce marchandage. Comme on peut s'y attendre il n'y a pas une unique définition de cette optimalité, et cela laisse la place à de nombreux concepts de solution [17]. Ce problème forme une partie centrale de la théorie des jeux coopératifs. Les jeux coopératifs, où les agents peuvent "signer des accords", se distinguent des jeux non-coopératifs, où les agents doivent participer à une interaction afin de tenter d'atteindre le meilleur résultat de leur point de vue. Il est connu que pour la plupart des jeux la solution coopérative est meilleure pour tous les agents que la solution non-coopérative.

Les protocoles de négociation usuels peuvent être vus comme des jeux non-coopératifs. Une question intéressante est donc d'étudier quelle pourrait être leur contrepartie en terme de jeux coopératifs. Cela permettrait de trouver de meilleures solutions qu'avec ces protocoles. Nous appelons ce type d'opérateurs des opérateurs de conciliation [4].

Cela ne signifie pas que les opérateurs de conciliation sont meilleurs que les protocoles de négociation. Ils peuvent trouver de meilleures solutions, mais en contrepartie ils ne prennent pas en compte les problèmes de communication qui se posent lors d'applications réelles, ils supposent que les agents fournissent l'intégralité de leurs opinions et qu'ils sont suffisamment coopératifs pour accepter qu'un autre agent détermine quel est le résultat. Ces hypothèses sont très fortes si l'on considère des agents autonomes, néanmoins les opérateurs de conciliation peuvent être vus comme une idéalisation de la négociation, lorsque les limitations imposées par l'implémentation n'interfèrent pas avec la recherche de l'accord optimal.

Le problème de la modélisation de la négociation commence à être étudié sous l'angle de la théorie du changement de croyances [1, 2, 3, 18, 13, 12, 10, 4]. Le problème est de définir des opérateurs qui prennent comme donnée un profil de croyances (i.e un multi-ensemble de bases de croyances exprimées en logique propositionnelle) et qui produisent un nouveau profil contenant moins de conflits. L'idée suivie dans [2, 3, 10] pour définir des opérateurs de conciliation est d'utiliser un processus itératif : à chaque étape un ensemble d'agents est sélectionné. Ces agents doivent alors assouplir leur point de vue (i.e. affaiblir logiquement leur base). Ce processus s'arrête lorsqu'un accord, appelé consensus, est atteint. Plusieurs opérateurs intéressants peuvent être définis lorsque l'on fixe la fonction de sélection (la fonction qui sélectionne les agents devant s'affaiblir à chaque tour) et la fonction d'affaiblissement. Dans [10] la fonction de sélection est basée sur une notion de distance. Cela peut être justifié lorsque cette distance a un sens pour une application particulière, mais sinon, ce n'est qu'un choix arbitraire.

Ce que nous proposons dans cet article est d'utiliser comme fonction de sélection une mesure de conflit, qui permettra de savoir la quantité de conflit imputable à chaque agent. Et les agents qui devront affaiblir leur point de vue seront donc ceux qui apportent le plus de conflits. Nous montrerons que les mesures d'incohérences existantes ne sont pas satisfaisantes pour cela, et nous utiliserons des mesures d'incohérences basées sur la valeur de Shapley (un concept de solution issue de la théorie des jeux coopératifs) proposées récemment [9].

Après une brève section préliminaire, nous introduirons le cadre des Belief Game Models à la section 3. Section 4 nous don-

un ensemble compact (fermé et borné) convexe.

nerons les définitions des principales mesures d'incohérence et nous définirons les mesures d'incohérence de Shapley. Section 5 nous définirons les opérateurs de Belief Game Models utilisant les valeurs d'incohérence de Shapley. Nous conclurons avec quelques perspectives de ce travail section 7.

2 Préliminaires

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$ sur un alphabet fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles. Une interprétation est une application de $\mathcal{P}$ vers $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\varphi \in \mathcal{L}$ si et seulement si elle la rend vraie au sens usuel. $mod(\varphi)$ dénote l'ensemble des modèles de la formule φ, i.e. $mod(\varphi) = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \varphi\}$. Inversement, si X est un ensemble d'interprétations, $form(X)$ dénote la formule (à équivalence logique près) dont l'ensemble des modèles est X. φ est cohérente si et seulement si elle possède au moins un modèle.

Une base φ est une formule propositionnelle (ou un ensemble de formules propositionnelles considéré conjonctivement), qui représente les croyances ou les buts d'un agent (on parlera d'opinion dans la suite). Soit n bases $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, on appelle profil le multi-ensemble composé de ces n bases $\Psi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ (on utilise un multi-ensemble car plusieurs agents peuvent avoir des bases identiques).

On note $\bigwedge \Psi$ la conjonction des bases de Ψ, c'est-à-dire $\bigwedge \Psi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. On dit que le profil Ψ est cohérent, si $\bigwedge \Psi$ est cohérent. L'union sur les multi-ensembles est notée $\sqcup$ et l'inclusion sous ensembliste est notée $\sqsubseteq$. Le cardinal d'un ensemble ou d'un multi-ensemble Ψ est noté $\#(E)$.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble de toutes les bases cohérentes, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les profils finis non-vides.

Deux profils Ψ_1 et Ψ_2 sont équivalents ($\Psi_1 \equiv \Psi_2$) si et seulement si il existe une bijection entre Ψ_1 et Ψ_2 tel que chaque base de Ψ_1 est logiquement équivalente à son image dans Ψ_2.

3 Belief Game Model

Dans [1, 2] Richard Booth introduit les *Belief Negotiation Models*, qui sont des opérateurs de conciliation qui permettent d'atteindre un consensus entre les agents grâce à un processus de sélection-affaiblissement. Cette approche est une abstraction intéressante de la négociation. L'idée est que la négociation a pour but de trouver un consensus entre plusieurs agents ayant des points de vue conflictuels (i.e. des bases dont la conjonction est incohérente). Pour y parvenir certains agents devront affaiblir leur point de vue afin de pouvoir parvenir à un consensus (i.e à des bases dont la conjonction est cohérente). Une itération de ce processus se compose d'une étape de sélection, où l'on choisit les agents qui doivent affaiblir leur point de vue (on peut choisir l'un agent après l'autre, choisir les agents les plus problématiques, etc.). Une fois cette sélection effectuée la seconde étape est d'affaiblir les bases des agents choisis. Ce processus est itéré jusqu'à ce qu'un consensus soit atteint.

Ce travail a été repris dans [10], où une classe particulière d'opérateurs, les *Belief Game Models* (appelés BGM dans la suite) a été définie. Voir [10] pour les détails sur le lien exact entre les Belief Negotiation Models et les BGM. Nous nous intéresserons aux BGM dans la suite :

Définition 1 *Une* fonction de sélection *est une fonction* $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ *telle que*
– $g(\Psi) \sqsubseteq \Psi$
– *Si* $\bigwedge \Psi \not\equiv \top$, *alors* $\exists \varphi \in g(\Psi)$ *t.q.* $\varphi \not\equiv \top$
– *Si* $\Psi \equiv \Psi'$, *alors* $g(\Psi) \equiv g(\Psi')$

La fonction de sélection a pour but de determiner les agents qui doivent s'affaiblir à chaque itération. Comme la fonction d'affaiblissement doit affaiblir les bases, et comme il n'y a pas de base plus faible logiquement que la base tautologique, la seconde condition indique qu'au moins une base non tautologique doit être sélectionnée. Cela signifie donc qu'à chaque itération au moins une base sera affaiblie. La dernière condition est une condition d'anonymat (ou d'indépendance à la syntaxe), qui indique que la sélection des bases à affaiblir ne dépend que du contenu de ces bases et pas de leur "nom", ou de la façon dont ce contenu est représenté.

Définition 2 *Une* fonction d'affaiblissement *est une fonction* $\blacktriangledown : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *telle que :*
– $\varphi \vdash \blacktriangledown(\varphi)$
– *Si* $\varphi \equiv \blacktriangledown(\varphi)$*, alors* $\varphi \equiv \top$
– *Si* $\varphi \equiv \varphi'$*, alors* $\blacktriangledown(\varphi) \equiv \blacktriangledown(\varphi')$

La fonction d'affaiblissement doit permettre d'affaiblir logiquement la base des agents qui ont été sélectionnés. Les deux premières conditions assurent que la base sera remplacée par une base strictement plus faible logiquement (à moins que la base soit déjà une tautologie). La dernière condition est une condition d'indépendance de syntaxe : le résultat de la fonction d'affaiblissement ne dépend que du contenu informationnel des bases, et pas de leur syntaxe.

La fonction d'affaiblissement s'étend sur les profils : soit Ψ' un sous-ensemble de Ψ,

$$\blacktriangledown_{\Psi'}(\Psi) = \bigsqcup_{\varphi \in \Psi'} \blacktriangledown(\varphi) \sqcup \bigsqcup_{\varphi \in \Psi \setminus \Psi'} \varphi$$

Donc les seules bases Ψ qui sont affaiblies sont celles de Ψ', les autres bases ne changent pas.

Dans certains cas le résultat de la négociation doit obéir à certaines contraintes (contraintes physiques, normes, etc.). On supposera que ces contraintes d'intégrité sont représentées par une formule propositionnelle, notée μ. Un opérateur BGM est donc défini par :

Définition 3 *La solution de la conciliation d'un profil* Ψ *pour un BGM* $\mathcal{N} = \langle g, \blacktriangledown \rangle$ *sous les contraintes d'intégrité* μ*, noté* $\mathcal{N}_\mu(\Psi)$*, est le profil* $\Psi^\mu_\mathcal{N}$ *défini par :*
– $\Psi_0 = \Psi$
– $\Psi_{i+1} = \blacktriangledown_{g(\Psi_i)}(\Psi_i)$
– $\Psi^\mu_\mathcal{N}$ *est le premier* Ψ_i *qui est cohérent avec* μ

La solution de la conciliation d'un profil est donc le résultat d'un "jeu" basé sur les opinions/croyances des agents. A chaque itération certaines bases sont sélectionnées pour être affaiblies, jusqu'à ce qu'un consensus soit atteint.

Voyons à présent deux exemples de fonctions d'affaiblissement et deux familles de fonctions de sélection.

Définition 4 *Soit une base* φ.
– *La* fonction d'affaiblissement drastique *oublie toutes les informations d'une base, i.e. :* $\blacktriangledown_\top(\varphi) = \top$.
– *La* fonction d'affaiblissement par dilatation *est définie par :*

$$mod(\blacktriangledown_\delta(\varphi)) = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \exists \omega' \models \varphi \\ d_H(\omega, \omega') \leq 1\}$$

où d_H *est la distance de Hamming entre interprétations, i.e. le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent. Soient deux interprétations* ω *et* ω'*, alors* $d_H(\omega, \omega') = |\{a \in \mathcal{P} \mid \omega(a) \neq \omega'(a)\}|$.

Avant de donner des exemples de fonction de choix, nous avons besoin de quelques définitions :

Définition 5 *Une (pseudo)distance d entre deux bases est une fonction $d : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow I\!N$ telle que $d(\varphi, \varphi') = 0$ ssi $\varphi \wedge \varphi' \nvdash \bot$ et $d(\varphi, \varphi') = d(\varphi', \varphi)$.*

Deux exemples de telles distances sont :

$$d_D(\varphi, \varphi') = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \wedge \varphi' \nvdash \bot \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$d_H(\varphi, \varphi') = \min_{\omega \models \varphi, \omega' \models \varphi'} d_H(\omega, \omega')$$

Définition 6 *Une fonction d'agrégation est une fonction f qui associe un entier naturel à chaque tuple d'entiers naturels satisfaisant les propriétés de (non-décroissance), (minimalité) et d'(identité).*
- *Si $x \leq y$, alors $f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$.* *(non-décroissance)*
- *$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n = 0$.* *(minimalité)*
- *$f(x) = x$.* *(identité)*

On dit qu'un fonction d'agrégation est symétrique si elle satisfait également :

- *Pour toute permutation σ, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$* *(symétrie)*

Définition 7 *Une fonction de sélection symétrique à base de modèles $g^{d,h}$ est définie par : $g^{d,h}(\Psi) = \{\varphi_i \in \Psi \mid h(d(\varphi_i, \varphi_1), \ldots, d(\varphi_i, \varphi_n))$ est maximale$\}$ où h est une fonction d'agrégation symétrique, et d une distance entre bases.*

Ces fonctions de sélection choisissent donc les bases qui sont les "plus loin" des autres, selon une distance déterminée.

Une autre famille de fonctions de sélection se base sur les sous-ensembles maximaux cohérents de bases. Ces sous-ensembles maximaux cohérents peuvent être considérés comme les éléments les plus proches de la cohérence (et donc du consensus) dans le profil. Les bases sélectionnées sont alors celles qui ont le plus mauvais "*score*" par rapport à ces sous-ensembles maximaux cohérents. Naturellement il y a plusieurs façons de définir ce score, ce qui donne différentes fonctions.

Définition 8 *Soit* $\text{MAXCONS}(\Psi)$ *l'ensemble des* maxcons *de Ψ, i.e. les sous-ensembles maximaux (pour l'inclusion ensembliste) cohérents de Ψ. Formellement,* $\text{MAXCONS}(\Psi)$ *est l'ensemble de tous les multi-ensembles M tels que :*
- *$M \sqsubseteq \Psi$,*
- *$\bigwedge M \not\models \bot$ et*
- *si $M \sqsubset M' \sqsubseteq \Psi$, alors $\bigwedge M' \models \bot$.*

Définition 9 *Une fonction de sélection à base de formules g^{mc} est définie par :*

$$g^{mc}(\Psi) = \{\varphi_i \in \Psi \mid h(\varphi_i, \text{MAXCONS}(\Psi)) \text{ est minimal}\}$$

On peut définir de nombreuses telles fonctions, nous n'en citerons qu'une.

Définition 10

$$h^{mc1}(\varphi, \text{MAXCONS}(\Psi)) = \#(\{M \mid M \in \text{MAXCONS}(\Psi) \text{ et } \varphi \in M\})$$

Pour cette fonction de sélection le score d'une base est le nombre de maxcons auxquels cette base appartient.

Illustrons à présent sur un exemple [16] quel est le comportement de quelques opérateurs BGM, les opérateurs $\langle g^{d_H,\Sigma}, \blacktriangledown_\delta \rangle$, $\langle g^{d_H,\max}, \blacktriangledown_\delta \rangle$, et $\langle g^{mc1}, \blacktriangledown_\delta \rangle$.

Exemple 1 *Considérons trois agents $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ avec les bases suivantes $\varphi_1 = \{\neg b \wedge (a \vee c)\}$, $\varphi_2 = \{(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)\}$,*

$\varphi_3 = \{a \wedge b \wedge c\}$. *Pour les calculs donnés ci-dessous il est plus simple de considérer ces bases comme l'ensemble de leurs modèles :* $Mod(\varphi_1) = \{(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$, $Mod(\varphi_2) = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$, $Mod(\varphi_3) = \{(1,1,1)\}$. *Il n'y a pas de contraintes pour le résultat, donc* $\mu = \top$.

$\langle g^{d_H,\Sigma}, \blacktriangledown_\delta \rangle$ *: Comme* Ψ *n'est pas cohérent, effectuons la première itération.* $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, $d(\varphi_1, \varphi_3) = 1$, $d(\varphi_2, \varphi_3) = 2$. *Donc* $h^{\Sigma}_{\Psi}(\varphi_1) = 1$, $h^{\Sigma}_{\Psi}(\varphi_2) = 2$, $h^{\Sigma}_{\Psi}(\varphi_3) = 3$. *Cela donne* $g^{d_H,\Sigma}(\Psi) = \{\varphi_3\}$. *Donc* φ_3 *est remplacé par* $\varphi_{3_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_3) = form(\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\})$. *Nous n'avons toujours pas obtenu un profil* Ψ *cohérent, il est nécessaire d'effectuer une seconde itération. Calculons les nouvelles distances.* $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, $d(\varphi_1, \varphi_{3_1}) = 0$, $d(\varphi_2, \varphi_{3_1}) = 1$. *Donc* $h^{\Sigma}_{\Psi}(\varphi_1) = 0$, $h^{\Sigma}_{\Psi}(\varphi_2) = 1$, $h^{\Sigma}_{\Psi}(\varphi_{3_1}) = 1$. *Cela donne* $g^{d_H,\Sigma}(\Psi) = \{\varphi_2, \varphi_{3_1}\}$, *et* φ_2 *est remplacé par* $\varphi_{2_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_2) = form(\{(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\})$, *et* φ_{3_1} *est remplacé par* $\varphi_{3_2} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_{3_1}) = form(\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\})$. *Nous avons atteint un profil cohérent, le résultat est le donc le profil* $\Psi' = \{\varphi_1, \varphi_{2_1}, \varphi_{3_2}\}$, *et la conjonction (consensus) est la base dont les modèles sont* $\{(0,0,1), (1,0,1)\}$.

$\langle g^{d_H,\max}, \blacktriangledown_\delta \rangle$ *: Comme* Ψ *n'est pas cohérent, il faut effectuer une première itération.* $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, $d(\varphi_1, \varphi_3) = 1$, $d(\varphi_2, \varphi_3) = 2$. *Donc* $h^{\max}_{\Psi}(\varphi_1) = 1$, $h^{\max}_{\Psi}(\varphi_2) = 2$, $h^{\max}_{\Psi}(\varphi_3) = 2$. *Cela donne* $g^{d_H,\max}(\Psi) = \{\varphi_2, \varphi_3\}$. *Donc* φ_2 *est remplacé par* $\varphi_{2_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_2) = form(\{(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\})$, *et* φ_3 *est remplacé par* $\varphi_{3_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_3) = form(\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\})$. *Le profil obtenu est cohérent, le résultat est donc* $\Psi' = \{\varphi_1, \varphi_{2_1}, \varphi_{3_1}\}$, *et le modèle de la conjonction est* $\{(1,0,1)\}$.

$\langle g^{mc1}, \blacktriangledown_\delta \rangle$ *:* Ψ *n'est pas cohérent, et* $\text{MAXCONS}(\Psi) = \{\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\varphi_3\}\}$. $h^{mc1}_{\Psi}(\varphi_1) = h^{mc1}_{\Psi}(\varphi_2) = h^{mc1}_{\Psi}(\varphi_3) = 1$, *et* $g^{mc1}(\Psi) = \Psi$. *Il faut donc affaiblir les trois bases :* $\varphi_{1_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_1) = form(\{(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(0,0,0),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\})$, $\varphi_{2_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_2) = form(\{(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\})$, *et* $\varphi_{3_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_3) = form(\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\})$. *Ce profil est cohérent, le résultat est donc* $\Psi' = \{\varphi_{1_1}, \varphi_{2_1}, \varphi_{3_1}\}$.

4 Mesures d'incohérence de Shapley

Nous souhaitons utiliser comme fonction de sélection pour les BGM, des fonctions prenant en compte la quantité de conflit imputable à chaque base. Ce seront donc les agents/bases qui posent le plus de problèmes qui devront s'affaiblir.

Nous allons commencer par introduire les mesures d'incohérences usuelles. Le problème est que ces mesures sont définies pour une unique base/source/agent, et ne permettent pas d'imputer à chaque agent d'un groupe sa part de conflit.

4.1 Mesures d'incohérences basées sur les variables

Une méthode pour évaluer l'incohérence d'un ensemble de formules est de regarder quelle est la proportion du langage concernée par l'incohérence. Il n'est donc pas possible d'utiliser la logique classique à cette fin puisque l'incohérence contaminerait l'ensemble de la base (et du langage). Mais si on compare les deux profils $\Psi_1 = \{a, \neg a, b \wedge c, d\}$ et $\Psi_2 = \{a, \neg a, b \wedge \neg c, c \wedge \neg b, d, \neg d\}$, on remarque que dans Ψ_1 l'incohérence concerne principalement la variable a, alors que dans Ψ_2 toutes les variables sont incluses dans un conflit. C'est ce genre de distinctions que ces approches permettent.

Une méthode afin de circonscrire l'incohérence aux variables directement concernées est d'utiliser des logiques multivaluées, et plus précisément des logiques tri-valuées, avec une troisième "valeur de vérité" indiquant qu'il y a un conflit sur la valeur de vérité (vrai ou faux) de la variable.

Nous n'avons pas ici la place de détailler l'ensemble des mesures qui ont été proposées, voir [5, 7, 11, 8, 6] pour plus détails sur ces approches. Nous ne donnerons ici qu'un seul exemple de mesure, qui est un cas spécial des degrés de contradiction définis dans [11]. L'idée de la définition de ces degrés est que, étant donné un ensemble de tests sur la valeur de vérité de certaines formules du langage (typiquement sur les variables propositionnelles), le degré de contradiction est le coût minimal (grossièrement le nombre de tests nécessaires) d'un plan de test qui assure de retrouver la cohérence.

La mesure définie ici est le nombre (normalisé) minimum de variables propositionnelles ayant la valeur de vérité conflictuelle dans les LP_m-modèles [15] de la base. Introduisons tout d'abord la relation de LP_m-conséquence.

Une interprétation ω pour LP_m associe à chaque variable propositionnelle une des trois "valeurs de vérité" $\mathsf{F}, \mathsf{B}, \mathsf{T}$, la troisième valeur de vérité B signifiant intuitivement "à la fois vrai et faux". $3^{\mathcal{P}}$ est l'ensemble de toutes les interprétations de LP_m. Les "valeurs de vérité" sont ordonnées comme suit : $\mathsf{F} <_t \mathsf{B} <_t \mathsf{T}$.

- $\omega(\top) = \mathsf{T}, \omega(\bot) = \mathsf{F}$
- $\omega(\neg\alpha) = \mathsf{B}$ ssi $\omega(\alpha) = \mathsf{B}$
  $\omega(\neg\alpha) = \mathsf{T}$ ssi $\omega(\alpha) = \mathsf{F}$
- $\omega(\alpha \wedge \beta) = \min_{\leq_t}(\omega(\alpha), \omega(\beta))$
- $\omega(\alpha \vee \beta) = \max_{\leq_t}(\omega(\alpha), \omega(\beta))$

L'ensemble des modèles d'une formule φ est :

$$Mod_{LP}(\varphi) = \{\omega \in 3^{\mathcal{P}} \mid \omega(\varphi) \in \{\mathsf{T}, \mathsf{B}\}\}$$

On définit $\omega!$ comme l'ensemble des variables "incohérentes" d'une interprétation w, i.e. $\omega! = \{x \in \mathcal{P} \mid \omega(x) = \mathsf{B}\}$.

Les modèles minimaux d'une formule sont alors les "plus classiques" :

$$min(Mod_{LP}(\varphi)) = \{\omega \in Mod_{LP}(\varphi) \mid \nexists \omega' \in Mod_{LP}(\varphi) \text{ t.q. } \omega'! \subset \omega!\}$$

La relation de LP_m-consequence est alors définie par :

$$\varphi \models_{LP_m} \varphi \text{ ssi } min(Mod_{LP}(\varphi)) \subseteq Mod_{LP}(\varphi)$$

Donc φ est une consequence de φ si tous les modèles les "plus classiques" de φ sont des modèles de φ.

Les modèles d'un profil Ψ étant les interprétations qui sont modèles de chacune de ses bases, on définit la mesure d'incohérence LP_m, notée I_{LP_m} :

Définition 11 *Soit un profil Ψ.*

$$I_{LP_m} = \frac{\min_{\omega \in Mod_{LP}(\Psi)}(\mid \omega! \mid)}{\mid \mathcal{P} \mid}$$

La mesure d'incohérence d'une base est donc définie comme le nombre minimum de variables (divisé par le nombre total de variables) concernées par une incohérence dans les LP_m-modèles de cette base. Ce qui signifie intuitivement que la mesure d'incohérence d'une base exprime à quel point le moins incohérent des modèles de cette base est incohérent.

Exemple 2 *Soit $\Psi_4 = \{a, \neg a, b \wedge c, \neg b\}$. On trouve $I_{LP_m}(\Psi_4) = \frac{2}{3}$*

Donc les mesures d'incohérences basées sur les variables, comme celle-ci, permettent de décrire finement la quantité de conflit d'une base (ou d'un profil), mais sont incapables de prendre en compte la distribution de ce conflit entre les formules. En fait la mesure serait identique avec la base $\Psi_4' = \{a \wedge \neg a \wedge b \wedge \neg b \wedge c\}$. C'est un gros problème si on veut utiliser ces mesures pour les BGM, puisque nous voulons être capables de savoir quelle est la part du conflit imputable à chaque formule (agent). A cette fin, nous allons utiliser une notion issue de la théorie des jeux.

4.2 Jeux coalitionnels - Valeur de Shapley

Dans cette section nous donnons la définition des jeux coalitionnels et de la valeur de Shapley.

Définition 12 *Soit un ensemble de n joueurs $N = \{1, \ldots, n\}$. Un jeu coalitionnel est défini par une fonction $v : 2^N \to \mathbb{R}$, telle que $v(\emptyset) = 0$.*

Ce cadre définit un jeu d'une manière très abstraite, en se focalisant sur les différentes coalitions possibles. Une coalition est juste un sous-ensemble de N. Cette fonction exprime le gain que peut obtenir chaque coalition dans le jeu v lorsque tous ses membres coopèrent. Le problème est alors de savoir comment ce gain doit être partagé entre les joueurs[2] Expliquons ceci sur un exemple.

Exemple 3 *Soit $N = \{1, 2, 3\}$, et soit le jeu coalitionnel v suivant :*

$$\begin{array}{cc} v(\{1\}) = 1, & v(\{1,2\}) = 10, \\ v(\{2\}) = 0, & v(\{1,3\}) = 4, \\ v(\{3\}) = 1, & v(\{2,3\}) = 11, \\ \multicolumn{2}{c}{v(\{1,2,3\}) = 12} \end{array}$$

[2]On se place ici dans le cas d'utilités transférables (TU), c'est-à-dire qu'on suppose que l'utilité est une unité commune à tous les joueurs et qu'elle est partageable à l'envie (grossièrement on peut la voir comme une "monnaie").

La grande coalition (formée de tous les joueurs) peut apporter 12 aux trois joueurs. C'est la plus grande utilité atteignable par le groupe. Mais ce n'est pas le but principal de chacun des joueurs. En particulier on peut remarquer que deux coalitions peuvent apporter quasiment autant : la coalition $\{1, 2\}$ donne 10 et la coalition $\{2, 3\}$ apporte 11, qui ne doivent être partagés qu'entre deux joueurs. On peut également remarquer que tous les joueurs ne partagent pas la même situation dans ce jeu. En particulier le joueur 2 est toujours d'un grand intérêt pour toute coalition qu'il rejoint. Il semble donc en position d'espérer un meilleur gain que les autres joueurs dans ce jeu. Par exemple il peut proposer au joueur 3 de former la coalition $\{2, 3\}$, ce qui apporte 11, qui seraient partagés en 8 pour le joueur 2 et 3 pour le joueur 3. Comme il sera difficile pour le joueur 3 de gagner plus que cela avec une autre coalition, il sera tenté d'accepter.

Un concept de solution pour les jeux coalitionnels doit prendre en compte ce genre d'arguments. Cela signifie que si l'on désire *résoudre* ce jeu en définissant quel est l'utilité qui est *due* à chaque agent, cela nécessite d'être capable de quantifier l'utilité qu'un agent est en droit de revendiquer étant donné le pouvoir que lui confère sa position dans le jeu.

Définition 13 *Une valeur est une fonction qui associe à chaque jeu v un vecteur d'utilité $S(v) = (S_1, \ldots, S_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Cette fonction donne l'utilité que peut espérer chaque agent i dans le jeu v, c'est à dire qu'elle mesure, en un sens, le pouvoir de i dans le jeu v.

Shapley propose une solution à ce problème en définissant une valeur dont l'idée peut être expliquée comme suit :

On considère que les coalitions se forment suivant un ordre donné (un premier joueur entre dans la coalition, puis un second, etc.), et que l'utilité imputée à chaque joueur est son utilité marginale (c'est-à-dire l'utilité qu'il apporte à la coalition existante), donc pour une coalition C qui ne contient pas i, l'utilité marginale de i est $v(C \cup \{i\}) - v(C)$. Comme on ne peut faire a priori aucune hypothèse sur l'ordre dans lequel les coalitions se forment, on suppose qu'ils sont tous équiprobables. Cela mène à la formule suivante :

$$S_i(v) = \sum_{C \subseteq N} \frac{(c-1)!(n-c)!}{n!}(v(C) - v(C \setminus \{i\}))$$

où c est la cardinalité de C.

Exemple 4 *La valeur de Shapley du jeu défini dans l'exemple 3 est* $(\frac{17}{6}, \frac{35}{6}, \frac{20}{6})$.

Ces valeurs montrent que c'est le joueur 2 qui a la meilleure position dans ce jeu, comme nous l'avions expliqué intuitivement lorsque nous avons donné l'exemple 3.

4.3 Mesures d'incohérences utilisant la valeur de Shapley

Etant donné une mesure d'incohérence, l'idée est de l'utiliser comme la fonction définissant un jeu coalitionnel, et ensuite d'utiliser la valeur de Shapley pour calculer la part de conflit qui peut être imputée à chaque base du profil [9].

Cela permet de combiner la puissance des valeurs d'incohérences basées sur les variables et d'utiliser la valeur de Shapley pour connaître la part de responsabilité de chaque formule.

On ne demande que quelques propriétés à la mesure d'incohérence.

Définition 14 *Une mesure d'incohérence I est appelée mesure d'incohérence basique si elle satisfait les propriétés suivantes :*

- $I(\varphi) = 0$ *ssi* φ *est consistant* **(Consistance)**
- $0 \leq I(\varphi) \leq 1$ **(Normalisation)**
- $I(\varphi \cup \varphi') \geq I(\varphi)$ **(Monotonie)**
- *Si* α *est une formule libre*[3] *de* $\varphi \cup \{\alpha\}$, *alors* $I(\varphi \cup \{\alpha\}) = I(\varphi)$ **(FFI)**
- *Si* $\alpha \vdash \beta$ *et* $\alpha \nvdash \perp$, *alors* $I(\varphi \cup \{\alpha\}) \geq I(\varphi \cup \{\beta\})$ **(Dominance)**

La propriété de consistance impose qu'une base consistante a un degré d'incohérence nul. La propriété de monotonie exprime le fait que la quantité de conflit d'une base ne peut qu'augmenter lorsqu'on ajoute de nouvelles formules (construites sur le même langage). La propriété FI indique qu'ajouter une formule qui n'apporte aucun conflit dans la base ne change pas le degré de conflit. La propriété de dominance exprime le fait que ce sont les formules logiquement fortes qui sont susceptibles de générer le plus de conflits. La propriété normalisation n'est pas aussi indispensable que les autres, elle n'est là que pour simplifier l'expression des degrés.

On peut à présent définir les valeurs d'incohérences de Shapley [9] :

Définition 15 *Soit une mesure d'incohérence basique I. La valeur d'incohérence de Shapley (SIV) correspondante, notée S_I, est définie comme la valeur de Shapley du jeu coalitionnel défini par la fonction I, i.e. en notant n la cardinalité de Ψ et c la cardinalité de C, soit $\varphi \in \Psi$:*

$$S_I^{\Psi}(\varphi) = \sum_{C \subseteq \Psi} \frac{(c-1)!(n-c)!}{n!}(I(C) - I(C \setminus \{\varphi\}))$$

[3] Une *formule libre* d'une base K est une formule de K qui n'appartient à aucun sous-ensemble minimal inconsistant de la base.

Notons que cette SIV donne une valeur pour chaque base du profil Ψ, donc si on considère la base Ψ comme le vecteur $\Psi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, alors $S_I(\Psi)$ exprime le vecteur de la SIV correspondant, i.e.

$$S_I(\Psi) = (S_I^{\Psi}(\varphi_1), \ldots, S_I^{\Psi}(\varphi_n))$$

Voyons cela sur l'exemple suivant 1.

Exemple 5 *Considérons trois agents* $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *avec les bases suivantes* $\varphi_1 = \{\neg b \wedge (a \vee c)\}$, $\varphi_2 = \{(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)\}$, $\varphi_3 = \{a \wedge b \wedge c\}$.

Alors $I_{LP_m}(\varphi_1) = I_{LP_m}(\varphi_2) = I_{LP_m}(\varphi_3) = I_{LP_m}(\{\varphi_1, \varphi_2\}) = 0$. $I_{LP_m}(\{\varphi_1, \varphi_3\}) = \frac{1}{3}$, $I_{LP_m}(\{\varphi_2, \varphi_3\}) = \frac{2}{3}$, $I_{LP_m}(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}) = \frac{2}{3}$.

Donc $S_{I_{LP_m}}(\varphi_1) = \frac{1}{18}$, $S_{I_{LP_m}}(\varphi_2) = \frac{4}{18}$, *et* $S_{I_{LP_m}}(\varphi_3) = \frac{7}{18}$.

Donc, d'après cette valeur d'incohérence de Shapley, c'est l'agent φ_3 qui génère le plus de conflits dans le groupe (profil), et φ_1 est l'agent le moins problématique.

A notre connaissance, les SIV sont les seules valeurs d'incohérences qui permettent de discriminer finement les incohérences, en examinant la proportion du langage impliquée dans les incohérences, tout en décrivant la distribution du conflit entre les différentes bases/formules.

Voir [9] pour plus de détails sur les propriétés de ces valeurs d'incohérences. Voyons à présent comment utiliser cette idée pour définir des opérateurs BGM.

5 Shapley Belief Game Model

L'idée est donc de définir des BGM qui utilisent une SIV comme fonction de sélection, afin de disposer d'une méthode plus adéquate pour sélectionner les bases qui devront s'affaiblir.

Une SIV indique quelle part du conflit global est imputable à chaque agent. La fonction de sélection choisit alors les agents les plus conflictuels, et la base de ces agents est alors affaiblie à l'aide de la fonction d'affaiblissement.

Définition 16 *Un* Shapley Belief Game Model *(SBGM) est un BGM* $\mathcal{N} = \langle S_I, \blacktriangledown \rangle$, *où* S_I *est une SIV.*

La solution d'un profil Ψ *pour un SBGM* $\mathcal{N} = \langle S_I, \blacktriangledown \rangle$ *sous les contraintes d'intégrité* μ, *noté* $\mathcal{N}_\mu(\Psi)$, *est le profil* $\Psi^{\mu}_{\mathcal{N}}$ *défini par :*
- $\Psi_0 = \Psi$
- $\Psi_{i+1} = \blacktriangledown_{argmax(S_I(\Psi_i))}(\Psi_i)$
- $\Psi^{\mu}_{\mathcal{N}}$ *est le premier* Ψ_i *qui est cohérent avec* μ

Voyons à présent un exemple de SBGM.

Exemple 6 *Considérons le SBGM* $\mathcal{N} = \langle S_{I_{LP_m}}, \blacktriangledown_\delta \rangle$. *Soient trois agents* $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *avec les bases suivantes :* $\varphi_1 = \{\neg b \wedge (a \vee c)\}$, $\varphi_2 = \{(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)\}$, $\varphi_3 = \{a \wedge b \wedge c\}$.

Comme calculé exemple 5, on a $S_{I_{LP_m}}(\varphi_1) = \frac{1}{18}$, $S_{I_{LP_m}}(\varphi_2) = \frac{4}{18}$, *et* $S_{I_{LP_m}}(\varphi_3) = \frac{7}{18}$. *La valeur maximale est celle de* $S_{I_{LP_m}}(\varphi_3)$, *donc* φ_3 *est l'agent le plus conflictuel, il est donc choisi pour l'affaiblissement.* $\varphi_{3_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_3) = form(\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\})$. *Nous n'avons toujours pas atteint un profil cohérent à cette étape, il faut donc recommencer le processus. Les nouvelles valeurs d'incohérence sont :* $S_{I_{LP_m}}(\varphi_1) = 0$, $S_{I_{LP_m}}(\varphi_2) = \frac{1}{6}$, *et* $S_{I_{LP_m}}(\varphi_{3_1}) = \frac{1}{6}$. *Les deux bases les plus problématiques sont ici* φ_2 *et* φ_{3_1}, *elles doivent donc être affaiblies.* φ_2 *est remplacé par*

$\varphi_{2_1} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_2) = form(\{(0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1)\})$, *et* φ_{3_1} *est remplacé par* $\varphi_{3_2} = \blacktriangledown_\delta(\varphi_{3_1}) = form(\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\})$. *Un profil cohérent est obtenu, le résultat est donc* $\Psi' = \{\varphi_1, \varphi_{2_1}, \varphi_{3_2}\}$.

6 Propriétés des SBGM

Il n'y a pas de caractérisation logique générale des opérateurs de conciliations, néanmoins certains auteurs ont étudié des propriétés d'opérateurs de conciliation particuliers. Par exemple Booth définit les opérateurs de contraction sociale à l'aide des propriétés suivantes (nous reformulons ces propriétés avec nos notations, voir [3] pour la formulation originale). Notons $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ le profil initial et $\Psi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*\}$ le profil obtenu par contraction sociale. Pour simplifier on ne considérera que le cas sans contraintes d'intégrité ici.

(sc1) $\forall \varphi*_i \in \Psi^*, \varphi_i \vdash \varphi*_i$

(sc2) Ψ^* est consistant

(sc3) Si Ψ est consistant, alors $\Psi^* = \Psi$

Il est facile de montrer que :

Proposition 1 *Tout SBGM satisfait* **(sc1)**, **(sc2)**, *et* **(sc3)**.

Booth propose également des propriétés supplémentaires, comme par exemple :

(sc5) Si $\varphi_i \wedge \bigwedge_{\varphi_j^* \in \Psi^*, j \neq i} \varphi_j^*$ est cohérent, alors $\varphi_i^* = \varphi_i$

(sc5) n'est pas satisfait par les SBGM, mais cette propriété est montrée trop contraignante dans [3]. SBGM satisfont la propriété plus faible :

(free) Si φ_i est une base libre[4] de Ψ, alors $\varphi_i^* = \varphi_i$.

Dans [12] Meyer et al. définissent des opérateurs de concession (qui sont des opérateur de conciliation définis uniquement pour 2 agents). Leurs opérateurs satisfont les propriétés de Booth **(sc1)**, **(sc2)**, et **(sc3)**. Ils demandent également deux propriétés supplémentaires. Reformulées avec nos notations, cela donne, avec $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$:

(C5) Si $\varphi_1^* \wedge \varphi_2$ est consistant alors $\varphi_1^* \wedge \varphi_2^* \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$.

(C6) Si $\varphi_1^* \wedge \varphi_2$ est consistant et $\varphi_2^* \wedge \varphi_1$ n'est pas consistant, alors $\varphi_1^* \wedge \varphi_2^* \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ n'est pas consistant.

Les auteurs justifient ces deux propriétés par des arguments d'équité entre agents. Le résultat de la concession ($\varphi_1^* \wedge \varphi_2^*$) doit être soit incohérent avec les bases originales ($\varphi_1 \vee \varphi_2$), ou il doit impliquer leur conjonction. Ces propriétés semblent apporter une certaine équité entre les agents (par exemple le résultat de la concession ne peut pas être consistant avec seulement une des bases initiales). Mais cela est obtenu avec des conditions très restrictives. Il est souligné dans [13] que les BNM de Booth ne satisfont pas ces propriétés. Les SBGM, qui sont un cas particulier de BNM, ne les satisfont pas non plus.

7 Perspectives

Ce travail est un premier pas vers l'étude des opérateurs de conciliation et des SBGM. Il reste beaucoup à faire. Il serait intéressant par exemple de caractériser logiquement les opérateurs de conciliation, comme des opérateurs abstraits de négociation. Plus spécifiquement, il serait

[4]Une base libre K de Ψ est une base qui appartient à tout sous-ensemble maximal (pour l'inclusion ensembliste) consistant Ψ' de Ψ.

intéressant d'étudier plus précisément les propriétés logiques des SBGM. Une autre question intéressante est de déterminer si les SBGM sont implémentables, ou approximables, par un protocole de négociation.

Remerciements

Ce travail a bénéficié du financement de la région Nord-Pas-de-Calais et du FEDER.

Références

[1] R. Booth. A negotiation-style framework for non-prioritised revision. In *Proc. of TARK'01*, pages 137–150, 2001.

[2] R. Booth. Social contraction and belief negotiation. In *Proc. of KR'02*, pages 374–384, 2002.

[3] R. Booth. Social contraction and belief negotiation. *Information Fusion*, 7(1) :19–34, 2006.

[4] O. Gauwin, S. Konieczny, and P. Marquis. Conciliation and consensus in iterated belief merging. In *Proc. of ECSQARU'05*, pages 514–526, 2005.

[5] J. Grant. Classifications for inconsistent theories. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 19 :435–444, 1978.

[6] J. Grant and A. Hunter. Measuring inconsistency in knowledgebases. *Journal of Intelligent Information Systems*, 2006.

[7] A. Hunter. Measuring inconsistency in knowledge via quasi-classical models. In *Proc. of AAAI'2002*, pages 68–73, 2002.

[8] A. Hunter and S. Konieczny. Approaches to measuring inconsistent information. In *Inconsistency Tolerance*, volume LNCS 3300, pages 189–234. Springer, 2005.

[9] A. Hunter and S. Konieczny. Shapley inconsistency values. In *Proc. of KR'06*, pages 249–259, 2006.

[10] S. Konieczny. Belief base merging as a game. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 14(3) :275–294, 2004.

[11] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Quantifying information and contradiction in propositional logic through epistemic tests. In *Proc. of IJCAI'03*, pages 106–111, 2003.

[12] T. Meyer, N. Foo, D. Zhang, and R. Kwok. Logical foundations of negotiation : Outcome, concession and adaptation. In *Proc. of AAAI'04*, pages 293–298, 2004.

[13] T. Meyer, N. Foo, D. Zhang, and R. Kwok. Logical foundations of negotiation : Strategies and preferences. In *Proc. of KR'04*, pages 311–318, 2004.

[14] J. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 28 :155–162, 1950.

[15] G. Priest. Minimally inconsistent LP. *Studia Logica*, 50 :321–331, 1991.

[16] P. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7 :133–160, 1997.

[17] W. Thomson. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 2, chapter Cooperative Models of Bargaining, pages 1237–1284. North-Holland, 1994.

[18] D. Zhang, N. Foo, T. Meyer, and R. Kwok. Negotiation as mutual belief revision. In *Proc. of AAAI'04*, pages 317–322, 2004.